デデキント和の拡張について (代数的整数論とその周辺)

AUTHOR(S):

太田, 香

数理解析研究所講究録 1200 巻 2001 年 116-128

デデキント和の拡張について

津田塾大学 太田 香 (Kaori Ota)
Tsuda College

§1. Introduction および 準備

デデキント和は $\log\eta(z)$ の変換公式に現れ、デデキントによりその相互法則が証明された (cf. [16]) 。その後、さまざまな人たちによりいろいろな拡張がなされ、拡張された和についての相互法則も得られている : Apostol, Carlitz, Rademacher, Berndt, Zagier, Halbritter, Solomon 等々。現在は

$$\sum_{0\leq i_1,\ldots,i_r<a} \bar{B}_{r_1}\left(\frac{i_1+\lambda_1}{a}\right)\cdots\bar{B}_{r_n}\left(\frac{i_n+\lambda_n}{a}\right) \tag{1.1}$$

$(a\in\mathbf{N}, 0\leq r_1,\ldots,r_n\in\mathbf{Z}, \lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbf{R})$ の形のようなものまで考えられ、その相互法則については、江上繁樹さん (富山大学) が cone に付随した多重ゼータ関数を用いた証明を与え ([9, 1993 年])、Chapman は Solomon の方法を n 次元格子に拡張して考えることにより証明した ([8, 2000 年])。((1.1) の正確な形については、それぞれの論文を参照して下さい。 $\bar{B}_*$ については下の定義 1 を参照)

ここでは、Apostol による拡張に注目する。まず初めに必要な定義を与える。

定義 1. n-th Bernoulli 数 B_n, n-th Bernoulli 多項式 $B_n(x)$, n-th Bernoulli 関数 $\bar{B}_n(x)$ は、次により定義される :

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}t^n \quad , \quad \frac{t\,e^{xt}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n!}t^n \tag{1.2}$$,

$$\begin{cases} \bar{B}_n(x) & = B_n(\{x\}) \qquad (n>1 \text{ のとき}) \\ \bar{B}_1(x) & = \begin{cases} B_1(\{x\}) & (x\notin\mathbf{Z} \text{ のとき}) \\ 0 & (x\in\mathbf{Z} \text{ のとき}). \end{cases} \end{cases}$$

ここで、$\{x\}$ は x の小数部分 (つまり、$0\leq\{x\}<1$) を表す。また、χ を conductor f の Dirichlet 指標とした時、$B_{n,\chi}$ を

$$\sum_{a=1}^{f}\frac{\chi(a)\,t\,e^{at}}{e^{ft}-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{n,\chi}}{n!}t^n$$

により定める。

以後、k, h を $(k,h)=1$ である自然数とする。

定理 1. (Apostol, [1, 1950 年]) $n\in\mathbf{N}$ とする。デデキント和を

$$s_n(k,h)=\sum_{a=1}^{h-1}\frac{a}{h}\bar{B}_n\left(\frac{ka}{h}\right) \quad , \quad s_n(h,k)=\sum_{b=1}^{k-1}\frac{b}{k}\bar{B}_n\left(\frac{hb}{k}\right)$$

により定めると、n が奇数のとき

$$\frac{1}{n}\{k^{n-1}s_n(h,k)+h^{n-1}s_n(k,h)\}=\frac{({}^1B\,h-{}^2B\,k)^{n+1}}{n(n+1)kh}+\frac{B_{n+1}}{(n+1)kh}$$

が成り立つ。ここで、

$$({}^1B\,h-{}^2B\,k)^{n+1}=\sum_{l=0}^{n+1}\binom{n+1}{l}B_l\,h^l(-1)^{n+1-l}B_{n+1-l}k^{n+1-l} \tag{1.3}$$

である。

この定理は n が奇数の時のみを扱っているが、n が偶数の時はデデキント和の各々が簡単に計算できる。ここで注目されるのが、右辺の

$$\frac{({}^1B\,h-{}^2B\,k)^{n+1}}{n(n+1)kh}$$

の項で、これは Barnes による２重ゼータ関数の $s=1-n$ における値と殆ど同じである。そこで、２重ゼータ関数を変形することにより、上の相互法則が得られないかを考える。そのために、Barnes の多重ゼータ関数について必要な部分のみを復習する。

定義 2. (cf. [2, 3])

(1) $\alpha,\,\omega_1,\ldots,\omega_r\in\mathbf{C},\ \ \omega_1\cdots\omega_r\neq 0$ とし、$\tilde{\omega}=(\omega_1,\ldots,\omega_r)$ とおく。 Barnes の r-重 Bernoulli 多項式の微分 ${}_rS'_n(\alpha\,;\tilde{\omega})$ を、

$$\frac{(-1)^r\,t\,e^{-\alpha t}}{\prod_{i=1}^r(1-e^{-\omega_i t})}=(\ t\ の非正冪の項\ )+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}{}_rS'_n(\alpha\,;\tilde{\omega})}{n!}t^n \tag{1.4}$$

により定義する。以後、微分しか現れない。

(2) $\alpha,\,\omega_1,\ldots,\omega_r$ の各実部 >0 とする。Barnes の r-重ゼータ関数 $\zeta_r(s\,;\alpha\,,\tilde{\omega})$ を

$$\zeta_r(s\,;\alpha\,,\tilde{\omega})=\sum_{m_1,\ldots,m_r=0}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+m_1\omega_1+\cdots+m_r\omega_r)^s}$$

により定義する。ζ_r は、$\mathrm{Re}(s)>r$ において正則な関数である。

Remark 1.(1) $r=1$ のとき、${}_rS'_n$ および ζ_r はそれぞれ

$$\begin{aligned}{}_1S'_n(\alpha\,;(\omega)) &= \omega^{n-1}B_n\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)\\ \zeta_1(s\,;\alpha,(\omega)) &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+m\omega)^s}=\frac{1}{\omega^s}\zeta\left(s\,,\,\frac{\alpha}{\omega}\right)\end{aligned}$$

である。ここで、$\zeta\left(s\,,\frac{\alpha}{\omega}\right)$ は Hurwitz zeta 関数である。

(2) ${}_rS'_n(\alpha\,;\tilde{\omega})$ は次の表示を持つ：

$$ {}_rS'_n(\alpha\,;\tilde{\omega}) = \frac{({}^1B\,\omega_1 + \cdots + {}^rB\,\omega_r + \alpha)^{n+r-1} n!}{\prod_{i=1}^r \omega_i \cdot (n+r-1)!} \,. $$

ただし、 $({}^1B\,\omega_1 + \cdots + {}^rB\,\omega_r + \alpha)^{n+r-1}$ は (1.3) と同様に定義される。 この表示は、(1.4) の左辺を Bernoulli 数の母関数 (1.2) の積とみなすことにより得られる。

定理 2. (cf. [2, 3]) $\zeta_r(s\,;\alpha\,,\tilde{\omega})$ は次の積分表示を持つ：

$$ \zeta_r(s\,;\alpha\,,\tilde{\omega}) = \frac{\Gamma(1-s)\,e^{-s\pi i}}{2\pi i} \int_{I(\lambda,\infty)} \frac{e^{-\alpha t}\,t^{s-1}}{\prod_{i=1}^r (1-e^{-\omega_i t})}\,dt \,. $$

(ここで、λ は $0<\lambda<\min\left(\left|\frac{2\pi}{\omega_1}\right|,\cdots,\left|\frac{2\pi}{\omega_r}\right|\right)$ をみたし、$I(\lambda,\infty)$ は実軸上を $+\infty$ から λ まできて、0 の周りを半径 λ の円周上を時計と反対方向にまわり、また λ から $+\infty$ に戻る積分路である。) この右辺はすべての s について定義され (極をいくつか持つが)、これにより ζ_r は $\mathbf{C}$ に解析接続される。また、$\forall n \in \mathbf{N}$ に対して右辺の積分は留数から得られ、従って

$$ \zeta_r(1-n\,;\alpha\,,\tilde{\omega}) = \frac{(-1)^r\,{}_rS'_n(\alpha\,;\tilde{\omega})}{n} $$

である。特に $r=1$ のときは、

$$ \zeta(1-n\,,\alpha) = -\frac{B_n(\alpha)}{n} \tag{1.5} $$

である。

Remark 2. $\alpha=0$ の場合、つまり

$$ \tilde{\zeta}_r(s\,;\tilde{\omega}) \overset{def}{=} \sum_{m_1,\ldots,m_r=0}^{\infty\,\prime} \frac{1}{(m_1\omega_1+\ldots+m_r\omega_r)^s} $$

(和は、$m_1,\ldots,m_r$ 各々が $(m_1,\ldots,m_r)=(0,\ldots,0)$ 以外で非負整数上をわたる) は、

$$ \tilde{\zeta}_r(s\,;\tilde{\omega}) = \zeta_r(s\,;\omega_1,\tilde{\omega}) + \tilde{\zeta}_{r-1}(s\,;(\omega_2,\ldots,\omega_r)) $$

により帰納的に $\mathbf{C}$ へ解析接続され、$\forall n \in \mathbf{N}$ に対して

$$ \tilde{\zeta}_r(1-n\,;\tilde{\omega}) = \frac{(-1)^r\,{}_rS'_n(0\,;\tilde{\omega})}{n} - \delta \tag{1.6} $$

である。ここで、δ は $n=1$ のとき 1 で、それ以外は 0 である。特に、

$$ \tilde{\zeta}_2(1-n\,;(k,h)) = \frac{{}_2S'_n(0\,;(k,h))}{n} - \delta = \frac{({}^1B\,k + {}^2B\,h)^{n+1}}{n(n+1)kh} - \delta $$

で、これが定理 1 の右辺の第 1 項とほぼ同じである。

＜定理 1 の $\tilde{\zeta}_2$ を用いた証明の概略＞

$\tilde{\zeta}_2$ を次のように変形する：

$$\tilde{\zeta}_2(s;(k,h))=\sum_{m,n=0}^{\infty'}\frac{1}{(km+hn)^s}=\sum_{a=0}^{h-1}\sum_{b=0}^{k-1}\sum_{m',n'=0}^{\infty'}\frac{1}{(ka+hb+kh(m'+n'))^s}$$

$$=\sum_{a=0}^{h-1}\sum_{b=0}^{k-1}\sum_{N=0}^{\infty'}\frac{N+1}{(ka+hb+khN)^s}\,.$$

この変形は、$m=a+hm'$ $(0\le a\le h-1, 0\le m'\in\mathbf{Z})$, $n=b+kn'$ $(0\le b\le k-1, 0\le n'\in\mathbf{Z})$ とおきかえ, 次に $N=m'+n'$ とおいて得られる。そして更に次のように変形される：

$$\tilde{\zeta}_2(s;(k,h))=\frac{1}{(kh)^s}\sum_{a=0}^{h-1}\sum_{b=0}^{k-1}\left\{\sum_{N=0}^{\infty'}\frac{1}{\left(\frac{ka+hb}{kh}+N\right)^{s-1}}+\left(1-\frac{ka+hb}{kh}\right)\sum_{N=0}^{\infty'}\frac{1}{\left(\frac{ka+hb}{kh}+N\right)^{s}}\right\}$$

$$=\frac{1}{(kh)^s}\left\{\sum_{a=0}^{h-1}\sum_{b=0}^{k-1}\zeta^*\left(s-1,\frac{ka+hb}{kh}\right)+\sum_{a=0}^{h-1}\sum_{b=0}^{k-1}\zeta^*\left(s,\frac{ka+hb}{kh}\right)\right.$$

$$\left.-\sum_{a=0}^{h-1}\sum_{b=0}^{k-1}\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)\zeta^*\left(s,\frac{ka+hb}{kh}\right)\right\}\qquad(1.7)\,.$$

ここで、

$$\zeta^*(s,\alpha)=\begin{cases}\zeta(s,\alpha) & (\mathrm{Re}(\alpha)>0\text{ のとき})\\ \zeta(s) & (\alpha=0\text{ のとき})\end{cases}$$

である。

(1.7) において $s=1-n$ とおくと, (1.5) , (1.6) ($r=1$ のとき) より

$$\tilde{\zeta}_2(1-n;(k,h))=-\frac{(kh)^{n-1}}{n+1}\sum_{a=0}^{h-1}\sum_{b=0}^{k-1}B_{n+1}\left(\frac{ka+hb}{kh}\right)-\frac{(kh)^{n-1}}{n}\sum_{a=0}^{h-1}\sum_{b=0}^{k-1}B_n\left(\frac{ka+hb}{kh}\right)$$

$$+\frac{(kh)^{n-1}}{n}\sum_{a=0}^{h-1}\sum_{b=0}^{k-1}\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)B_n\left(\frac{ka+hb}{kh}\right)-\delta\qquad(1.8)$$

が得られる。(1.8) の右辺において、第１項目から $-\frac{B_{n+1}}{(n+1)kh}$ が、第２項目から $-\frac{B_n}{n}$ が、第３項目から $\frac{1}{n}\{h^{n-1}s_n(k,h)+k^{n-1}s_n(h,k)\}$ が現れる。この際必要な $B_n(x)$ の性質は、次の２つである。

(a) 差分式 (the difference equation) :

$$B_n(x+1)=B_n(x)+n\,x^{n-1}\,.$$

(b) 分配関係 (the distribution relation) : $N\in\mathbf{N}$ に対して

$$\sum_{i=0}^{N-1}B_n\left(x+\frac{i}{N}\right)=\frac{B_n(Nx)}{N^{n-1}}\,.$$

これらはともに、$B_n(x)$ の母関数 (1.2) を用いて簡単に得られるが、$\zeta(s,x)$ の持っている性質とも考えられる。例えば、(a) は

$$\zeta(s,x+1)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(x+1+m)^s}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(x+m)^s}-\frac{1}{x^s}=\zeta(s,x)-\frac{1}{x^s}.$$

そして、$s=1-n$ とおけばよい。従って、$\zeta'(s,x)$ ($\zeta(s,x)$ の s についての微分) も、同様な性質を持っていると考えられ、それが次のセクションで用いられる。

§2. デデキント和の微分について

§1 では、$\tilde{\zeta}_2(1-n;(k,h))$ を変形することにより $s_n(k,h)$, $s_n(h,k)$ が現れ、更に相互法則が得られた。そこで今度は、$\tilde{\zeta}_2'(1-n;(k,h))$ ($\tilde{\zeta}_2$ の s についての微分) からデデキント和の "微分"を定義し、相互法則を導くことを考える (詳細については [14] を参照)。$s_n(k,h)$ は、$\sum_{a=1}^{h-1}\frac{a}{h}\zeta^*\left(1-n,\frac{ka+hb}{kh}\right)$ の項から得られたので、その微分は $\sum_{a=1}^{h-1}\frac{a}{h}\left(\zeta^*\right)'\left(1-n,\frac{ka+hb}{kh}\right)$ から定義するのが自然に思われる。$\zeta(s,z)$ の積分表示

$$\zeta(s,z)=\frac{\Gamma(1-s)\,e^{-s\pi i}}{2\pi i}\int_{I(\lambda,\infty)}\frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}t^{s-1}\,dt$$

を用いて s について微分すると、被積分関数から $\log t$ が現れる。そこで、$s=1-n$ とおいた値として次の関数を定義する。

定義 3. $0\le n\in\mathbf{Z}$ とし、$z\in\mathbf{C}$, $\mathrm{Re}(z)>0$ とする。$LG_n(z)$ を

$$LG_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{I(\lambda,\infty)}\frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\frac{\log t}{t^n}\,dt+\frac{(-1)^n}{n!}B_n(z)(\gamma-\pi i)$$

により定義する ($I(\lambda,\infty)$ は、定理 2 における積分路と同じである)。

$LG_n(z)$ は, その定義から $\zeta'(1-n,\,z)$ の主な部分を与える。$LG_n(z)$ は、$n=2$ のとき Shintani により導入され、Katayama-Ohtsuki により任意の n に拡張された (cf. [18,12])。

Remark 3. $LG_n(z)$ は、性質 (a),(b) を満たす (これは §1 の終わりで注意している)。

そこで、$LG_n(z)$ を用いデデキント和の微分を次のように定義する。

定義 4. $n\in\mathbf{N}$ に対して デデキント和の微分を

$$\begin{aligned}
s_n'(k,h) &= (-1)^n\,n!\sum_{a=1}^{h-1}\frac{a}{h}LG_n\left(\left\{\frac{ka}{h}\right\}\right)\\
s_n'(h,k) &= (-1)^n\,n!\sum_{b=1}^{k-1}\frac{b}{k}LG_n\left(\left\{\frac{hb}{k}\right\}\right)
\end{aligned}$$

により定義する。

次の相互法則が $\tilde{\zeta}_2'(1-n\,;(k,h))$ から得られる。

命題 1. (デデキント和の微分についての相互法則)

$$\frac{1}{n}\{h^{n-1}s_n'(k,h)+k^{n-1}s_n'(h,k)\}=\tilde{\zeta}_2'(1-n\,;(k,h))-\zeta'(1-n)-\frac{1}{kh}\zeta'(-n)$$

$$+\frac{1}{n}\{h^{n-1}\log h\cdot s_n(k,h)+k^{n-1}\log k\cdot s_n(h,k)\}+\frac{A_{n-1}}{n}\{h^{n-1}s_n(k,h)+k^{n-1}s_n(h,k)\}.$$

ただし、$A_j=\sum_{m=1}^{j}\frac{1}{m}$ $(j\geq 1$ のとき$)$, $A_0=0$ である。

Remark 4. $\zeta_2'(1-n\,;\alpha\,,(k,h))$ を用いると、α だけ shift した和の相互法則が得られる (下の定理4を参照)。

次に、相互法則を $n=1$ のときに考えてみる。$n=1$ のときは

$$LG_1(z)=\log\Gamma(z)-\frac{1}{2}\log(2\pi)\quad,\quad\tilde{\zeta}_2'(0\,;(k,h))=-\log\rho_2(k,h)\quad,$$

$$\zeta_2'(0\,;\alpha\,,(k,h))=\log\left\{\frac{\Gamma_2(\alpha\,;(k,h))}{\rho_2(k,h)}\right\}$$

である。ここで、ρ_2 , Γ_2 は Barnes による the Stirling modular form と the double gamma function である (cf. [2, 3,18,19,12])。これらを用いて相互法則を書き直してみると次が得られる。

定理 3.

$$T(k,h)=\sum_{a=1}^{h-1}\frac{a}{h}\log\Gamma\left(\left\{\frac{ka}{h}\right\}\right)\quad,\quad T(h,k)=\sum_{b=1}^{k-1}\frac{b}{k}\log\Gamma\left(\left\{\frac{hb}{k}\right\}\right)\qquad \text{とおくと、}$$

$$T(k,h)+T(h,k)=\left(\frac{h+k}{4}-1\right)\log(2\pi)+\frac{1}{kh}\zeta'(-1)-\{s_1(h,k)\log k+s_1(k,h)\log h\}+\log\rho_2(k,h)$$

が成り立つ。

この定理の等式を $\rho_2(k,h)$ について解いて、次の系を得る。

系 1. $\rho_2(1\,,h/k)$ の有限積表示が次のように得られる：

$$\rho_2\left(1\,,\frac{h}{k}\right)=(2\pi)^{1-\frac{h+k}{4}}e^{-\frac{1}{kh}\zeta'(-1)}k^{\frac{1}{12kh}+\frac{1}{2}}\left(\frac{h}{k}\right)^{s_1(k,h)}\prod_{a=1}^{h-1}\Gamma\left(\left\{\frac{ka}{h}\right\}\right)^{\frac{a}{h}}\prod_{b=1}^{k-1}\Gamma\left(\left\{\frac{hb}{k}\right\}\right)^{\frac{b}{k}}.$$

定理 4.

(1) $\alpha\in\mathbf{R}$ とし

$$T(\alpha\,;k,h)=\sum_{\substack{a\neq a^0\\ a=1}}^{h-1}\frac{a}{h}\log\Gamma\left(\left\{\frac{\alpha+ka}{h}\right\}\right)\quad,\quad T(\alpha\,;h,k)=\sum_{\substack{b\neq b^0\\ b=1}}^{k-1}\frac{b}{k}\log\Gamma\left(\left\{\frac{\alpha+hb}{k}\right\}\right)$$

とおく。ただし、a^0 (resp. b^0) は、$1 \le a^0 \le h-1$, $\alpha + ka^0 \equiv 0 \pmod h$ (resp. $1 \le b^0 \le k-1$, $\alpha + hb^0 \equiv 0 \pmod k$) となる整数（もし存在するならば）である。

α が、$0 < \alpha < h+k, \alpha \in \mathbf{Z}$ のとき、次が成り立つ：

$$T(\alpha\,;k,h) + T(\alpha\,;h,k) = \left(\frac{\alpha}{kh} - 1\right)\log(kh) + \frac{\alpha}{2kh}\log(2\pi) - \{\log h \cdot s_1(\alpha;k,h)$$

$$+\log k \cdot s_1(\alpha\,;h,k)\} + \{\log h \cdot s_1(k,h) + \log k \cdot s_1(h,k)\} + \frac{a^0}{2h}(2\log k + \log h)$$

$$+\frac{b^0}{2k}(2\log h + \log k) + \{T(h,k) + T(k,h)\} - \log\Gamma_2(\alpha\,;(k,h))\,.$$

ここで, $s_1(\alpha\,;k,h)$, $s_1(\alpha\,;h,k)$ は α だけ shift した和

$$s_1(\alpha\,;k,h) = \sum_{a=1}^{h-1}\frac{a}{h}\bar{B}_1\left(\frac{\alpha+ka}{h}\right) \quad , \quad s_1(\alpha\,;h,k) = \sum_{b=1}^{k-1}\frac{b}{k}\bar{B}_1\left(\frac{\alpha+hb}{k}\right)$$

である。

(2) $\alpha \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ とし、

$$\tilde{T}(\alpha\,;k,h) = \sum_{a=1}^{h-1}\frac{a}{h}\log\Gamma\left(\frac{\alpha}{h} + \left\{\frac{ka}{h}\right\}\right) \quad , \quad \tilde{T}(\alpha\,;h,k) = \sum_{b=1}^{k-1}\frac{b}{k}\log\Gamma\left(\frac{\alpha}{k} + \left\{\frac{hb}{k}\right\}\right)$$

とおくと、次が成り立つ：

$$\tilde{T}(\alpha\,;k,h) + \tilde{T}(\alpha\,;h,k) = \frac{1}{2kh}B_2(\alpha) - \frac{1}{kh}LG_2(\alpha) + \left(1 - \frac{\alpha}{kh}\right)\log\Gamma(\alpha) - \frac{1}{kh}\zeta'(-1)$$

$$+\frac{\alpha}{2kh}\log(2\pi) - \frac{(h-1)\alpha}{2h}\log h - \frac{(k-1)\alpha}{2k}\log k + \{T(k,h) + T(h,k)\} - \log\Gamma_2(\alpha\,;(k,h))$$

この定理の等式を $\Gamma_2(\alpha\,;(k,h))$ について解いて、次の系を得る。

系 2. Γ_2 の有限積表示が次のように得られる：

(1) α を $0 < \alpha < h+k$, $\alpha \in \mathbf{Z}$ とすると、

$$\Gamma_2(\alpha\,;(k,h)) = (2\pi)^{\frac{\alpha}{2kh}} \cdot k^{s_1(h,k) - s_1(\alpha;h,k) + \frac{\alpha}{kh} - 1 + \frac{a^0}{h} + \frac{b^0}{2k}} \cdot h^{s_1(k,h) - s_1(\alpha;k,h) + \frac{\alpha}{kh} - 1 + \frac{a^0}{2h} + \frac{b^0}{k}}$$

$$\cdot \frac{\prod_{b=1}^{k-1}\Gamma\left(\left\{\frac{hb}{k}\right\}\right)^{\frac{b}{k}} \prod_{a=1}^{h-1}\Gamma\left(\left\{\frac{ka}{h}\right\}\right)^{\frac{a}{h}}}{\prod_{\substack{b \ne b^0 \\ b=1}}^{k-1}\Gamma\left(\left\{\frac{\alpha+hb}{k}\right\}\right)^{\frac{b}{k}} \prod_{\substack{a \ne a^0 \\ a=1}}^{h-1}\Gamma\left(\left\{\frac{\alpha+ka}{h}\right\}\right)^{\frac{a}{h}}}\,.$$

(2) $\alpha \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ とすると、

$$\Gamma_2\left(\alpha\,;\left(1\,,\frac{h}{k}\right)\right) = \exp\left\{\frac{1}{2kh}B_2(k\alpha) - \frac{1}{kh}LG_2(k\alpha) - \frac{1}{kh}\zeta'(-1)\right\}\Gamma(k\alpha)^{\left(1-\frac{\alpha}{h}\right)}$$

$$\cdot(2\pi)^{\frac{\alpha}{2h}} h^{-\frac{(h-1)k\alpha}{2h}} k^{-\frac{k\alpha}{2} + 1 + \frac{k}{2h}\alpha^2 - \frac{k}{2h}\alpha} \prod_{a=1}^{h-1}\left(\frac{\Gamma\left(\left\{\frac{ka}{h}\right\}\right)}{\Gamma\left(\frac{k\alpha}{h} + \left\{\frac{ka}{h}\right\}\right)}\right)^{\frac{a}{h}} \prod_{b=1}^{k-1}\left(\frac{\Gamma\left(\left\{\frac{hb}{k}\right\}\right)}{\Gamma\left(\alpha + \left\{\frac{hb}{k}\right\}\right)}\right)^{\frac{b}{k}}\,.$$

(3) α を正の整数とすると、

$$\Gamma_2(\alpha;(k,h)) = (2\pi)^{\frac{\alpha}{2kh}} \prod_{j=1}^{\alpha-1} \left(j^{1-\frac{\alpha-j}{kh}}\right) \cdot h^{-\frac{(h-1)\alpha}{2h}} \cdot k^{-\frac{(k-1)\alpha}{2k}}$$

$$\cdot \prod_{a=1}^{h-1} \left(\frac{\Gamma\left(\left\{\frac{ka}{h}\right\}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{h} + \left\{\frac{ka}{h}\right\}\right)} \right)^{\frac{a}{h}} \prod_{b=1}^{k-1} \left(\frac{\Gamma\left(\left\{\frac{hb}{k}\right\}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{k} + \left\{\frac{hb}{k}\right\}\right)} \right)^{\frac{b}{k}} .$$

Remark 5.

(1) $\rho_2(1,z)$ および $\Gamma_2(\alpha,(1,z))$ の無限積表示が Shintani により得られていて、それによりそれぞれの関数が $\{z\,|\,z \in \mathbf{C} - (-\infty, 0\,]\}$ および $\{(\alpha,z)\,|\,z \in \mathbf{C} - (-\infty,0]\,,\alpha \neq -(m+nz)\,, m,n = 0,1,\ldots\}$ に解析接続されている (cf. [19])。系 1 , 2(2) は z が正の有理数点における表示を与えている。

(2) もともとのデデキント和の相互法則が $\log \eta(z)$ の変換公式から得られたように、定理 3, 4 (その系) の別証が得られれば面白いと思われる。

§3. その他の拡張について（2つ）

ここではその他の拡張として、指標つきのデデキント和と多重デデキント和について述べる。2つとも Apostol の相互法則 (定理 1) の証明の自然な拡張である。この2種類の相互法則については、津田塾大学院生 (M2) の長坂裕美子さん、関根千鶴さんとの共同研究である (cf. [13])。

I. 指標つきのデデキント和

指標つきの和については、Berndt が 1970 年代に既にたくさん研究している。初めは、指標つきの Eisenstein 級数の変換公式に現れてくるものを指標つきの和と定義し、その相互法則を導いた (cf. [4, 5])。その後、Poisson の和公式を用いて、指標つきだけでなく周期的な集合に関する和の3項関係 (the three-term relation)、そして相互法則を証明した (cf. [6])。また、Berndt は theta 級数についても調べていて、theta 級数からは (-1) の冪を含んだ和が現れ、その相互法則が得られた (cf. [7])。

ここでは、異なる方法で異なる和 (ただし、特別な場合に $n=1$ のとき Berndt のと少しずれた和になるが) を定義し、その相互法則を与える。

定義 5. χ を $\bmod l$ で定義された Dirichlet 指標とし、$l\,|\,kh$ とする。指標つきのデデキント和を

$$\begin{aligned} s_n(\chi;(k,h)) &= k^{n-1} \sum_{a=0}^{h-1}\sum_{b=0}^{k-1} \frac{a}{h}\, \chi(ka+hb)\, \bar{B}_n\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right) \\ s_n(\chi;(h,k)) &= h^{n-1} \sum_{a=0}^{h-1}\sum_{b=0}^{k-1} \frac{b}{k}\, \chi(ka+hb)\, \bar{B}_n\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right) \end{aligned}$$

により定義する。$\chi = \chi_0$ (主指標) のときは、

$$s_n(\chi_0\,;(k,h)) = s_n(k,h)$$

である。

Remark 6. 等式 $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$ を用いると、次のことがわかる。

(1) χ が mod k の自明でない指標のとき、$\chi(-1) = (-1)^\lambda$ とおくと
$n \equiv \lambda \pmod 2$ のとき、

$$\begin{cases} s_n(\chi\,;(h,k)) = & \frac{1}{2}\,k^{1-n}\,B_{n,\chi} \\ s_n(\chi\,;(k,h)) = & \frac{1}{2}\,(h^{1-n} - \chi(h))\,B_{n,\chi}\,. \end{cases}$$

(2) $\chi = \chi_1\chi_2$, χ_1, χ_2 はそれぞれ mod k, mod h で定義された自明でない指標とする。
$\chi(-1) = (-1)^\lambda$ とおくと $n \equiv \lambda \pmod 2$ のとき、

$$s_n(\chi\,;(h,k)) = \frac{1}{2}\,k^{1-n} B_{n,\chi} \quad , \quad s_n(\chi\,;(k,h)) = \frac{1}{2}\,h^{1-n} B_{n,\chi}\,.$$

定理 5. (指標つきの和についての相互法則) $n \in \mathbf{N}$, $\chi \neq \chi_0$ とすると、次が成り立つ：

$$\frac{1}{n}\{h^{n-1}s_n(\chi\,;(k,h))+k^{n-1}s_n(\chi\,;(h,k))\} = \sum_{a=0}^{h-1}\sum_{b=0}^{k-1}\frac{\chi(ka+hb)({}^1B\,kh + {}^2B\,kh + ka + hb)^{n+1}}{n(n+1)(kh)^2}$$
$$+\frac{B_{n+1,\chi}}{hk(n+1)} + \frac{B_{n,\chi}}{n} \qquad (3.1)\,.$$

特に、$\chi = \chi_1\chi_2$ で、χ_1, χ_2 はそれぞれ mod k, mod h で定義された自明でない指標とすると、$n = 1$ のとき

$$s_1(\chi\,;(k,h)) + s_1(\chi\,;(h,k)) = \chi_1(h)\chi_2(k)\,B_{1,\chi_1}B_{1,\chi_2} + \frac{B_{2,\chi}}{2hk} + B_{1,\chi}$$

が成り立つ。

証明には

$$\tilde{\zeta}_2(s\,;(k,h),\chi) \overset{def}{=} \sum_{m,n=0}^{\infty\,\prime}\frac{\chi(km+hn)}{(km+hn)^s}$$

の $s = 1-n$ における値を用いる。

Remark 7. χ が mod k の自明でない指標で $n=1$ のとき、和の定義は少しずれているが、(3.1) は Berndt による相互法則と同じになる (cf. [5, 6])。

応用として、次の３つがあげられる。ただし、(1) (2) は相互法則の証明が考え方に使われている (cf. [15])。

(1) $d\ (< -4)$ を虚２次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ の判別式とし、$\chi = \chi_d$ を $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ の Kronecker 指標，$t \in \mathbf{N}$ を $t > 1$, $(t, d) = 1$ とする。$\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ の類数 $h(d)$ は次の式で与えられる：

$$h(d) = \frac{1}{t - \chi_d(t)} \sum_{j=1}^{[t/2]} (t - 2j + 1)\, A_j(\chi_d, |d|, t)\,.$$

ここで、

$$A_j(\chi_d, |d|, t) = \sum_{\frac{|d|(j-1)}{t} \le b < \frac{|d|j}{t}} \chi_d(b) \qquad \text{(short character sum)}$$

である。

(2) d を (1) の通りとし、$t > 1$ を $(t, d) = 1$ で td が $\mathbf{Q}(\sqrt{td})$ の判別式、２つの Kronecker 指標の商 $\chi_2 \overset{set}{=} \chi_{td}/\chi_d$ の conductor が t とする (従って χ_2 は mod t で定義される。conductor についての条件は、$t \not\equiv 3 \pmod 4$ と同じである)。このとき、$\mathbf{Q}(\sqrt{td})$ の類数 $h(td)$ は

$$h(td) = 2 \sum_{j=1}^{[t/2]} \left(\sum_{l=1}^{j-1} \chi_2(l) \right) A_j(\chi_d, |d|, t)$$

で与えられる。この式はLerch-Mordell の類数公式と呼ばれ、また Szmidt-Urbanowicz-Zagier による「Zagier の等式」を用いた別証明がある (cf. [20], [21, Chap.I, § 9.7])。(講演後にこのことを知りました。)

(1),(2) を比較して次のような合同式が得られる：t は $t \equiv 1 \pmod 4$ の素数とすると、

$$h(td) \equiv (1 - \chi_d(t))\, h(d) \pmod 4\,.$$

$h(d)$ が偶数のときはこれは当たり前であるが、$h(d)$ が奇数の時 (従って $h(td)$ の 2-rank=1)

$$h(td) \equiv 0 \pmod 4 \quad \Longleftrightarrow \quad \chi_d(t) = 1$$

という、Rédei-Reichardt の結果の一部が得られる (cf. [17])。(この合同式に関して、Rédei-Reichardt の結果を含め内藤浩忠さん (香川大学) に講演後いろいろ教えて頂いたので、ここに感謝します。)

(3) d_1 , d_2 , $\tilde{d}_1$, $\tilde{d}_2$ をそれぞれ虚２次体の判別式で、

$$d_1,\ d_2,\ \tilde{d}_1,\ \tilde{d}_2 < -4, \quad (d_1, d_2) = (\tilde{d}_1, \tilde{d}_2) = 1, \quad d_1 d_2 = \tilde{d}_1 \tilde{d}_2 = D$$

とする。$\chi_1, \chi_2, \tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_2$ をそれぞれの Kronecker 指標として $\chi=\chi_1\chi_2=\tilde{\chi}_1\tilde{\chi}_2$ とおくと、次が成り立つ：

$$h(d_1)h(d_2)-h(\tilde{d}_1)h(\tilde{d}_2)=\frac{1}{D}\left\{\sum_{n\in S(|\tilde{d}_1|,|\tilde{d}_2|)} n\,\chi(n)-\sum_{n\in S(|d_1|,|d_2|)} n\,\chi(n)\right\}.$$

ここで、自然数 u ,v に対して $S(u, v)$ は

$$S(u,v)=\{n=au+bv\,|\,a,b\in\mathbf{Z},\,0\le a<v,\,0\le b<u,\,n>uv\}$$

という集合である。

II. 多重デデキント和

「多重」という言葉は、既に Halbritter により [11] で用いられていて、そこでは (1.1) のタイプのものを指している。ここでは、パラメーターが異なるので、また「多重」以外に適当な言葉がみつからないので、やはり多重デデキント和と呼ぶことにする。

定義 6. $z_1,\ldots,z_{r-1}\in\mathbf{C}$, $z_1\cdots z_{r-1}\neq 0$ とし、$\tilde{z}=(z_1,\ldots,z_{r-1})$ とおく。$(k,\,h\,;\,\tilde{z})$ に関する r 重デデキント和を

$$\begin{aligned}(\mathbf{S}_r)_n\,(k,h\,;\tilde{z}) &= \sum_{a=1}^{h-1}\frac{a}{h}\,{}_rS'_n\left(\left\{\frac{ka}{h}\right\};\left(1,\frac{z_1}{h},\ldots,\frac{z_{r-1}}{h}\right)\right)\\ (\mathbf{S}_r)_n\,(h,k\,;\tilde{z}) &= \sum_{b=1}^{k-1}\frac{b}{k}\,{}_rS'_n\left(\left\{\frac{hb}{k}\right\};\left(1,\frac{z_1}{k},\ldots,\frac{z_{r-1}}{k}\right)\right)\end{aligned}$$

により定義する。$r=1$ のときは $s_n(k,h)$ と同じである。

定理 6. (r 重デデキント和の相互法則) $n\in\mathbf{N}$ とすると、次が成り立つ：

$$\begin{aligned}h^{n-1}\,(\mathbf{S}_r)_n\,(k,h\,;\tilde{z})+k^{n-1}\,(\mathbf{S}_r)_n\,(h,k\,;\tilde{z}) &= {}_{r+1}S'_n(0\,;(k,h,\tilde{z})\\ &\quad-\frac{1}{kh}\,{}_{r+1}S'_n(1\,;(1,1,\tilde{z}))+{}_rS'_n(0\,;(1,\tilde{z}))\,.\end{aligned}$$

証明には $\zeta_{r+1}(1-n\,;(k,h,\tilde{z}))$ を用いる。この法則の応用はまだ得られていない。

References

1. Apostol, T., Generalized Dedekind sums and transformation formulae of certain Lambert series, *Duke Math. J.* **17** (1950), 147-157.

2. Barnes, E. W., The theory of the double gamma functions, *Proc. London Math. Soc.* **31**(1899), 358-381.

3. Barnes, E. W., The theory of the multiple gamma functions, *Trans. Cambridge Phil. Soc.* **19**(1904), 374-425.

4. Berndt, B. C., Character transformation formulae similar to those for the Dedekind eta-function, *Proc. Sym. Pure Math.* No.24, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1973, 9-30.

5. Berndt, B. C., On Eisenstein series with characters and the values of Dirichlet L-functions, *Acta Arith.* **28**(1975), 299-320.

6. Berndt, B. C., Reciprocity theorems for Dedekind sums and generalizations, *Advances in Math.* **23**, no.3(1977), 285-316.

7. Berndt, B. C., Analytic Eisenstein series, theta-functions and series relations in the spirit of Ramanujan, *J. Reine Angew. Math.* **303/304**(1978), 332-365.

8. Chapman, R., Reciprocity laws for generalized higher dimensional Dedekind sums, *Acta Arith.* **93**(2)(2000), 189-199.

9. Egami, S., Reciprocity laws of multiple zeta functions and generalized Dedekind sums, in "Analytic Number Theory and Related Topics", K. Nagasaka(ed.), World Scientific, 1993, 17-27.

10. Halbritter, U., Berechnung der Werte von Zetafunktionen totalreeller kubischer Zahlkörper an ganzzahligen Stellen mittels verallgemeinerter Dedekindscher Summen, I, *J. Reine Angew. Math.* **361**(1985), 95-117.

11. Halbritter, U., Berechnung der Werte von Zetafunktionen totalreeller kubischer Zahlkörper an ganzzahligen Stellen mittels verallgemeinerter Dedekindscher Summen, II, *Results in Math.* **13**(1988), 99-134.

12. Katayama, K. and Ohtsuki, M., On the multiple gamma-functions, *Tokyo J. Math.* **21** (1998), 159-182.

13. Nagasaka, Y., Ota, K. and Sekine, C., Generalizations of Dedekind sums and their reciprocity laws, *preprint.*

14. Ota, K., Derivatives of Dedekind sums and their reciprocity law, *preprint.*

15. Ota, K., Dedekind sums with characters and class numbers of imaginary quadratic fields, *in preparation.*

16. Rademacher, H., "Topics in Analytic Number Theory", Grundlehren Math. Wiss. **169**, Springer-Verlag, 1973.

17. Rédei, L. and Reichardt, H., Die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten der Klassengruppe eines beliebigen quadratischen Zahlkörpers, *J. Reine Angew. Math.* **170** (1933), 69-74.

18. Shintani, T., On a Kronecker limit formula for real quadratic fields, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec.IA* **24** (1977), 167-199.

19. Shintani, T., A proof of the classical Kronecker limit formula, *Tokyo J. Math.* **3**, no.2(1980), 191-199.

20. Szmidt, J., Urbanowicz, J. and Zagier, D., Congruences among values of Dirichlet L-series at negative integers, *Acta Arith.* **71**(1995), 243-248.

21. Urbanowicz, J. and Williams, K.S., "Congruences for L-functions", Mathematics and Its Applications **511**, Kluwer Acad. Pub., 2000.